RÉVÉLATION DES PRÉFÉRENCES POUR LES BIENS PUBLICS : CARACTÉRISATION DES MÉCANISMES SATISFAISANTS

par Jerry GREEN
Harvard University

et Jean-Jacques LAFFONT *
Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique

Cet article propose une approche d'équilibre partiel rigoureuse du problème du «free rider», appelé ici problème du passager clandestin. La 1ère section fournit une caractérisation complète des mécanismes pour lesquels la révélation des vraies préférences est une stratégie dominante lorsque les fonctions d'utilité sont additivement séparables. La 2e section montre que le problème du déséquilibre du budget de l'Etat posé par ces mécanismes devient négligeable dans une économie à grand nombre de participants.

Si l'agent économique doit répartir ses ressources entre usages privé et public de façon à maximer sa satisfaction, il ne va évidemment en rien contribuer aux projets publics.

Wicksell [10]

Dans un système économique décentralisé, la souscription est certainement le moyen le plus naturel pour déterminer la production des biens publics et leur financement. Connaissant les contributions des autres agents, chaque individu détermine la sienne par la considération de l'accroissement de bien public qu'elle permet d'entreprendre et il ne prend pas en compte les gains d'utilité qui en résultent pour les autres agents. Il est intuitivement clair que cette solution ne correspond pas à une allocation efficace des ressources

(*) Nous remercions pour leurs commentaires et suggestions K. Arrow, G. Fuchs, R. Guesnerie, Cl. Henry, E. Kohlberg et E. Malinvaud.

(voir Malinvaud [7]). Dans la plupart des cas, en particulier lorsqu'il existe un grand nombre d'agents, le résultat est même désastreux car l'impact de sa propre contribution sur la production de bien public est pour chaque agent négligeable. Il va dès lors compter sur les autres pour financer le bien public en prétendant que ce service ne l'intéresse pas. Cette inaptitude des mécanismes décentralisés à conduire à une allocation efficace a été appelée dans la littérature anglo-saxonne, *the free rider problem,* que nous traduirons pour les besoins de cette note par *le problème du passager clandestin.*

Puisque les mécanismes décentralisés échouent, il faut trouver des mécanismes de décision qui permettent de résoudre le problème du passager clandestin et aboutissent à une allocation efficace des ressources. L'objectif de cette note est d'étudier une solution possible.

Nous nous restreignons ici au cas d'un projet unique de taille fixe. Dans la 1ère section, nous donnons une caractérisation complète des mécanismes qui apportent une solution au problème du passager clandestin dans une économie où les agents ont des fonctions d'utilité séparables. La section 2 traite du problème de l'équilibre du budget de l'Etat et fournit une solution approchée dans une économie à un grand nombre de participants.

1. CARACTERISATION DES MECANISMES SATISFAISANTS

Nous considérons une économie formée de N agents et un projet public potentiel dont l'exclusion n'est pas possible. Soit v_i la disponibilité à payer pour le bien public de l'agent i (exprimée en un bien privé appelé monnaie) qui est supposée être *indépendante* de ses ressources. Par simplicité de notation nous supposons que le coût du projet est nul. La même analyse peut être conduite avec un projet coûteux en soustrayant des évaluations personnelles des imputations appropriées (et définies *ex ante*) du coût du projet.

Les agents sont confrontés à des mécanismes définis ci-après :

Définition 1 : Un «*mécanisme*», $M = \{S, f\}$, est un ensemble d'espaces de stratégies S_i, $i = 1, \ldots, N$, et une fonction $f = \{d, t_1, \ldots, t_N\}$ de $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$ dans $\{0, 1\} \times R^N$ telle que pour $s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$:

1) le projet est accepté si et seulement si $d(s) = 1$;

2) le transfert en monnaie à l'agent i est $t_i(s)$, pour $i = 1, \ldots, N$.

Un mécanisme est donc un processus de décision et une règle de transfert. Si l'on suppose que chaque agent a une fonction d'utilité séparable, le gain de l'agent i peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u_i(s\,;\mathrm{M}) &= v_i + t_i(s) \quad \text{si} \quad d(s) = 1 \\ &= t_i(s) \qquad\quad\ \text{si} \quad d(s) = 0 \end{aligned}$$

Définition 2 *:* Un «*mécanisme de révélation*», MR $= \{\mathrm{R}^{\mathrm{N}}, f\}$, est un mécanisme pour lequel l'espace des stratégies de l'agent i est $\mathrm{S}_i = \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, et une stratégie est une évaluation monétaire du bien public.

Dans un mécanisme de révélation nous notons w_i la stratégie de l'agent $i, i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, et $w = (w_1, \ldots, w_{\mathrm{N}})$.

Définition 3 *:* Un «*mécanisme de révélation direct*», MRD $= \{\mathrm{R}^{\mathrm{N}}, f\}$, est un mécanisme de révélation pour lequel :

$$\begin{aligned} d(w) &= 1 \quad \text{si} \quad \Sigma w_i \geqslant 0 \\ d(w) &= 0 \quad \text{si} \quad \Sigma w_i < 0 \end{aligned}$$

Définition 4 *:* Un «*mécanisme de Groves*», MG $= \{\mathrm{R}^{\mathrm{N}}, f\}$, est un mécanisme de révélation direct pour lequel (*)

$$\begin{aligned} t_i(w) &= \Sigma w_{-i} + h_i(w_{-i}) \quad \text{si} \quad d(w) = 1 \\ &= h_i(w_{-i}) \qquad\qquad\quad \text{si} \quad d(w) = 0 \end{aligned}$$

où $h_i(\cdot)$ est une fonction arbitraire, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$.

Etant donné un mécanisme, soit $\mathrm{T}_i(v_i) \subset \mathrm{S}_i$, l'ensemble des stratégies dominantes de l'agent i lorsque sa vraie disponibilité à payer est v_i.

Définition 5 *:* Un mécanisme est dit *décisif*, si $\forall i$, $\forall v_i \in \mathrm{R}$, $\mathrm{T}_i(v_i) \neq \phi$.

Soit $\mathrm{S}'_i = \bigcup_{v_i \in \mathrm{R}} \mathrm{T}_i(v_i)$ l'ensemble des stratégies observables de l'agent i et soit $\mathrm{S}' = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{S}'_i$.

Dans cette note, nous nous intéressons seulement aux mécanismes décisifs.

Définition 6 *:* Un mécanisme de révélation est *motivant*, si la révélation de la vérité est une stratégie dominante pour chaque agent, c'est-à-dire si : $u_i(w_{-i}, v_i\,;\mathrm{MR}) \geqslant u_i(w_{-i}, w_i\,;\mathrm{MR})\ \forall w_{-i}, \forall w_i$ pour $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$.

(*) Par définition : $\Sigma w_{-i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathrm{N}} w_j$ et $h_i(w_{-i}) = h_i(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_{\mathrm{N}})$.

Définition 7 : Un mécanisme est *satisfaisant*, s'il conduit à une bonne décision, c'est-à-dire si :

$$\forall i\ , \forall s_i \in \mathrm{T}_i(v_i),\ d(s) = 1 \Leftrightarrow \Sigma\, v_i \geqslant 0$$

Théorème 1 : (Groves [4]). Un mécanisme de Groves est motivant.

Démonstration : Pour tout mécanisme de Groves :

$$u_i(w_{-i}\ , v_i\ ;\ \mathrm{G}) - u_i(w_{-i}\ , w_i\ ;\ \mathrm{G}) =$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \text{si} & v_i + \Sigma\, w_{-i} \geqslant 0 & \text{et} & \Sigma\, w_j \geqslant 0 \\ v_i + \Sigma\, w_{-i} \geqslant 0 & \text{si} & v_i + \Sigma\, w_{-i} \geqslant 0 & \text{et} & \Sigma\, w_j < 0 \\ -(v_i + \Sigma\, w_{-i}) > 0 & \text{si} & v_i + \Sigma\, w_{-i} < 0 & \text{et} & \Sigma\, w_j \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} & v_i + \Sigma\, w_{-i} < 0 & \text{et} & \Sigma\, w_j < 0 \end{array}$$

$w_i = v_i$ est donc l'unique stratégie dominante.

Q.E.D.

Nous disons qu'un mécanisme de révélation direct satisfait la propriété A si :

a) $t_i(w)$ est indépendant de w_i pour $\Sigma\, w_i \geqslant 0\ ,\quad i = 1\ , \ldots , \mathrm{N}$.

b) $t_i(w)$ est indépendant de w_i pour $\Sigma\, w_i < 0\ ,\quad i = 1\ , \ldots , \mathrm{N}$.

c) $t_i(w_{-i}\ , w_i) - t_i(w_{-i}\ , w_i') = \Sigma\, w_{-i}$ pour $\Sigma\, w_{-i} + w_i \geqslant 0$ et $\Sigma\, w_{-i} + w_i' < 0 \quad i = 1\ , \ldots , \mathrm{N}$.

Lemme : Un mécanisme de révélation direct est un mécanisme de Groves si et seulement si il satisfait la propriété A.

Démonstration : évidente.

Théorème 2 : Un mécanisme de révélation direct motivant est un mécanisme de Groves.

Démonstration : Nous montrons que si un M R D ne satisfait pas la propriété A, il n'est pas motivant.

Supposons tout d'abord que a) ne soit pas satisfait. Non a) implique :

$$\exists i\ ,\ w_{-i}\ , w_i\ , w_i'\ :\ t_i(w_{-i}\ , w_i) > t_i(w_{-i}\ , w_i')$$

avec : $\Sigma w_{-i} + w_i \geqslant 0$ et $\Sigma w_{-i} + w_i' \geqslant 0$

soit : $w_i' + t_i(w_{-i}, w_i) > w_i' + t_i(w_{-i}, w_i')$

Choisissons alors $v_i = w_i'$. Pour w_{-i}, l'agent i ne dit pas la vérité qui n'est donc pas une stratégie dominante. Le même argument montre que b) est aussi satisfait.

Supposons que c) en soit pas vrai. Non c) implique :

Cas I :

$\exists i$, $w_{-i}, w_i, w_i' : t_i(w_{-i}, w_i) - t_i(w_{-i}, w_i') = \Sigma w_{-i} + \epsilon$, $\epsilon > 0$

avec : $\Sigma w_{-i} + w_i \geqslant 0$ et $\Sigma w_{-i} + w_i' < 0$

D'après b) nous savons que $t_i(w_{-i}, w_i')$ est invariant si on modifie w_i' de sorte que $\Sigma w_{-i} + w_i'$ reste négatif,

soit donc, $\tilde{w}_i = -\Sigma w_{-i} - \dfrac{\epsilon}{2}$

$$t_i(w_{-i}, w_i') = t_i(w_{-i}, \tilde{w}_i)$$

et : $t_i(w_{-i}, w_i) + \tilde{w}_i = t_i(w_{-i}, \tilde{w}_i) + \dfrac{\epsilon}{2} > t_i(w_{-i}, \tilde{w}_i)$.

Supposons alors que $\tilde{w}_i = v_i$; alors :

$$v_i + t_i(w_{-i}, w_i) > t_i(w_{-i}, v_i)$$

une contradiction puisque, pour w_{-i}, l'agent i ne dit pas la vérité.

Cas II :

$\exists i, w_{-i}, w_i, w_i' : t_i(w_{-i}, w_i) - t_i(w_{-i}, w_i') = \Sigma w_{-i} - \epsilon$ $\epsilon > 0$

avec $\Sigma w_{-i} + w_i \geqslant 0$ et $\Sigma w_{-i} + w_i' < 0$.

De la même façon que ci-dessus, en choisissant cette fois

$$\tilde{w}_i = -\Sigma w_{-i} + \frac{\epsilon}{2}$$

et en utilisant a) on obtient une contradiction.

Q.E.D.

Théorème 3 : Un mécanisme de révélation satisfaisant et motivant est un mécanisme de Groves.

Démonstration : évidente.

Théorème 4 : Un mécanisme satisfaisant (S, f) qui remplit la condition d'unicité des stratégies dominantes(*) est tel que :

$$\exists \Psi_i , \quad i = 1, \ldots, N \quad \Psi_i : S_i' \to R$$

$$\exists \text{ mécanisme de Groves, } G = \{R^N, g\} \text{ tel que}$$

$$f(s) = g[\Psi_1(s_1), \ldots, \Psi_N(s_N)]$$

Dèmonstration : Soit $T_i(v_i)$ la stratégie dominante unique de l'agent i quand la vérité est v_i, $i = 1, \ldots, N$. A partir de (S, f) nous construisons un mécanisme de révélation (R^N, F) comme suit :

$$F(w) = f(T(w)), \quad w \in R^N$$

(R^N, f) est bien défini car $T_i(v_i)$ est un singleton, $i = 1, \ldots, N$. Supposons que (R^N, F) n'est pas motivant. Pour un couple (v_i, w_{-i}), il existe $w_i \neq v_i$ avec $F(w_i, w_{-i})$ préféré par l'agent i à $F(v_i, w_{-i})$, alors (avec des notations évidentes) $f(T_i(w_i), T_{-i}(w_{-i}))$ est préféré à $f(T_i(v_i), T_{-i}(w_{-i}))$, ce qui contredit le fait que $T_i(v_i)$ est une stratégie dominante. (R^N, f) est satisfaisant puisqu'il a les mêmes résultats que (S, f) ; c'est donc un mécanisme de révélation satisfaisant et motivant, donc, par le théorème 3, un mécanisme de Groves.

Notons maintenant que si $v_i \neq v_i'$, alors $T_i(v_i) \neq T_i(v_i')$. Si ce n'était pas vrai, on aurait, sans perte de généralité, $T_i(v_i) = T_i(v_i')$ pour $v_i > v_i'$. On pourrait alors choisir v_{-i} tel que $v_i + \Sigma v_{-i} > 0 > v_i' + \Sigma v_{-i}$. Puisque $T_i(v_i) = T_i(v_i')$, (v_i, v_{-i}) et (v_i', v_{-i}) conduisent à la même décision, alors qu'ils ne devraient pas, contredisant le fait que (R^N, F) est satisfaisant.

Nous pouvons alors définir $\Psi_i = T_i^{-1}$ de S_i' dans R et nous avons :

$$F[\Psi_1(s_1), \ldots, \Psi_N(s_N)] = f[T_1 \circ T_1^{-1}(s_1), \ldots, T_N \circ T_N^{-1}(s_N)] = f(s)$$

Q.E.D.

2. EQUILIBRE DU BUDGET DE L'ETAT

Une difficulté importante associée aux mécanismes étudiés dans la section précédente est qu'ils n'équilibrent pas de façon automatique le

(*) Voir Green et Laffont [3], pour la suppression de cette hypothèse d'unicité.

budget de l'institution qui organise la consultation des agents économiques. En effet, la somme des transferts nécessaires pour amener les agents à révéler la vérité, $\Sigma\, t_i(w)$ n'est nulle qu'en des circonstances fortuites. Ces déficits ou surplus peuvent être absorbés par imposition ou subvention en dehors du mécanisme, mais il est nécessaire, pour conserver la propriété de motivation, de supposer que les agents ne réalisent pas l'existence de ces impôts ou subventions lorsqu'ils formulent leurs réponses aux questions du mécanisme.

En vue de cette faiblesse, Groves et Ledyard [5] ont construit une famille de mécanismes qui, en présence de biens publics, permettent d'atteindre des optima de Pareto dans un cadre d'équilibre général. Pour obtenir ces résultats, ils doivent en raison des théorèmes de caractérisation des sections précédentes, affaiblir le résultat de Groves [4] en ce qui concerne les propriétés de non manipulation. La révélation des vraies disponibilités marginales à payer pour les biens publics a lieu à l'équilibre ; en d'autres mots, Groves et Ledyard doivent abandonner le résultat, selon lequel la vérité est une stratégie dominante, qui élimine tous les problèmes de théorie des jeux de nature non coopérative. De plus, la nécessité d'une procédure de tâtonnement pour atteindre l'équilibre suggère que la question de manipulation la plus pertinente concerne la manipulation le long du processus dynamique qui conduit à l'équilibre.

Les mécanismes étudiés dans la section I ont, par la propriété de stratégie dominante, des possibilités d'applications importantes (voir Green de Laffont [2]). C'est pourquoi il est crucial de montrer que le problème soulevé ci-dessus peut être résolu de façon satisfaisante pour ne pas remettre en cause l'intérêt des mécanismes de Groves. Notre objectif dans cette section est de montrer d'une part que la somme des transferts peut être rendue négligeable, et d'autre part, que si on redistribue cette somme de transferts la stratégie optimale des agents est très proche de la vérité lorsque le nombre d'agents est grand. De plus, on démontre que la probabilité de prendre une bonne décision tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

1. Impossibilité d'équilibrer le budget

Nous montrons dans cette sous-section qu'il est impossible de trouver un mécanisme de Groves particulier, c'est-à-dire, une fonction

$$h(\cdot) = (h_1(\cdot), \ldots, h_N(\cdot))$$

particulière, telle que la somme des transferts nécessaires soit nulle quelles que soient les vraies disponibilités à payer. Ce théorème d'impossibilité montre que l'on doit s'orienter vers des solutions approchées si on veut conserver la propriété de stratégie dominante. Diverses notions de solution approchée sont explorées par la suite.

Théorème 5 : Il n'existe pas de mécanisme de Groves tel que :

$$\Sigma\, t_i(w) = 0 \qquad \forall\, w \in R^N$$

Démonstration : Nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe une fonction vectorielle $h(\cdot)$ telle que :

$$\Sigma\, t_i(w) = 0 \qquad \forall\, w \in R^N .$$

Considérons tout d'abord le cas N = 2. Soit w_1^+, w_1^-, w_2 tel que

$$w_1^+ + w_2 > 0 \quad \text{et} \quad w_1^- + w_2 < 0 .$$

Par définition, nous avons alors :

$$w_1^+ + w_2 + h_1(w_2) + h_2(w_1^+) = 0 \tag{1.1}$$

$$h_1(w_2) + h_2(w_1^-) = 0 \tag{1.2}$$

Soustrayons (1.2) de (1.1) ; nous obtenons :

$$w_1^+ + h_2(w_1^+) - h_2(w_1^-) = -\, w_2 \tag{1.3}$$

Si nous varions w_2 de sorte que $w_1^+ + w_2$ reste positif, nous avons par (1.3) une contradiction puisque le membre de gauche ne dépend pas de w_2.

Cette démonstration peut facilement être généralisée à $N \geqslant 3$. Considérons $w_1^0, \ldots, w_N^0$ et A tels que :

$$-(N-1)\,A < \Sigma\, w_i^0 < -(N-2)\,A , \qquad A > 0 \tag{1.4}$$

Nous utilisons la notation suivante :

$h_k(0_{\ell \ldots p})$ est la fonction h_k avec pour argument $w_i^0 + A$ au lieu de w_i^0 sauf pour $i = \ell, \ldots, p$.

Puisque $\Sigma\, w_i^0 + (N-1)\,A > 0$, on a :

$$\sum_{i \neq N} h_i(0_N) + h_N(w^0) = -(N-1)\,[\Sigma\, w_i^0 + (N-1)\,A] \tag{1.5}$$

L'idée de la démonstration est de soustraire successivement de (1.5), les termes qui comportent un zéro, puis 2 zéros, etc. Dans (1.5), il y a C_{N-1}^1 termes à éliminer.

On utilise alors le fait que :

$$\Sigma\, w_i^0 + (N-2)\,A < 0 \quad \text{pour écrire} \quad (N-1) \text{ équations.}$$

$$\sum_{i \neq N} h_i(0_j, N) + h_N(0_j) = 0 \tag{1.6}$$

que l'on peut récrire :

$$\sum_{\substack{i \neq N \\ i \neq j}} h_i(0_{j,N}) + h_j(0_N) + h_N(0_j) = 0 \tag{1.7}$$

Chaque $h_i(0_N)$ dans (1.5) peut être supprimé en soustrayant l'équation i de (1.7) d'où :

$$-\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{i \neq N \\ i \neq j}} h_i(0_j, N) + h_N(w_0) - \sum_{j=1}^{N-1} h_N(0_j) =$$

$$= -(N-1)\,[\Sigma\, w_i^0 + (N-1)\,A]$$

Ce faisant, on a donc introduit dans l'équation C_{N-1}^1 $(N-2)$ termes avec deux zéros. On ignore toujours les termes correspondant à $h_N(\cdot)$ car ils ne contiennent pas w_N^0.

Si maintenant on utilise le fait que :

$$\Sigma\, w_i^0 + (N-3)\,A < 0$$

on peut écrire C_{N-1}^2 équations qui contiennent $C_{N-1}^2 \times 2$ termes avec deux zéros. Mais :

$$C_{N-1}^2 \times 2 = C_{N-1}^1 \times (N-2)$$

c'est-à-dire qu'avec ces équations on peut exactement (par symétrie) supprimer les termes avec deux zéros ; on a toutefois introduit ainsi des termes avec trois zéros.

A l'étape k, on a C_{N-1}^k $(N-1-k)$ termes à éliminer, mais on peut écrire :

$$C_{N-1}^{k+1} \quad \text{équations qui contiennent}$$

C_{N-1}^{k+1} $(k+1)$ termes appropriés c'est-à-dire $\dfrac{(N-1)\cdots(N-k+1)}{k\,!}$ soit exactement C_{N-1}^k $(N-1-k)$.

Lorsque à l'étape $(N-2)$ on introduit les termes avec N zéros, on en introduit :

$$C_{N-1}^{N-2} \times (N-2) = (N-1)\,(N-2)\,.$$

Par symétrie il ne reste plus qu'à prémultiplier l'équation (obtenue car $\Sigma\, w_i^0 < 0$)

$$\sum_{i \neq N} h_i(w_i^0) + h_N(w_i^0) = 0 \,,$$

par (N − 2) pour obtenir une équation dans laquelle dans le membre de gauche on n'a que des fonctions du type $h_N(\cdot)$ et à droite

$$-(N-1)\,[\Sigma\, w_i^0) + (N-1)\, A] \,.$$

Le membre de droite contient w_N^0 alors que le membre de gauche ne le contient pas, d'où une contradiction en modifiant w_N^0 dans un voisinage qui conserve les inégalités (1.4).

Q.E.D.

2. Le mécanisme à pivot. (voir Clarke [1]).

Nous considérons le mécanisme à pivot qui correspond au choix particulier suivant des fonctions $h_i(\cdot)$ dans la famille des mécanismes de Groves :

$$\begin{aligned} h_i(w_{-i}) &= -\Sigma\, w_{-i} && \text{si} \quad \Sigma\, w_{-i} \geqslant 0 \\ &= 0 && \text{si} \quad \Sigma\, w_{-i} < 0 \,. \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

La règle de transferts est alors, pour tout $i = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} t_i(w) &= 0 && \text{si} \quad \Sigma\, w_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\, w_{-i} \geqslant 0 \\ &= \Sigma\, w_{-i} && \text{si} \quad \Sigma\, w_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\, w_{-i} < 0 \\ &= -\Sigma\, w_{-i} && \text{si} \quad \Sigma\, w_i < 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\, w_{-i} \geqslant 0 \\ &= 0 && \text{si} \quad \Sigma\, w_i < 0 \quad \text{et} \quad \Sigma\, w_{-i} < 0 \,. \end{aligned}$$

Notons que le mécanisme conduit à des transferts qui sont toujours négatifs, de sorte qu'on fait toujours face à un excédent à redistribuer. Les agents qui payent la taxe sont ceux dont la réponse change le signe de l'agrégat —ces agents sont des pivots. Ils paient le montant du dommage qu'ils imposent aux autres participants par leur réponse. Ce mécanisme est l'analogue, dans le cas des biens publics, du mécanisme d'enchères proposé par Vickrey [9], dans lequel l'objet de l'enchère revient à l'agent qui a proposé le montant le plus élevé à un prix égal à la deuxième enchère.

3. Approche statistique

Nous considérons les disponibilités à payer des agents comme les résultats de tirages successifs indépendants dans une population donnée, représentée par une distribution de probabilité absolument continue F (·). Nous pouvons calculer ainsi la somme espérée des impôts nécessaires au mécanisme à pivot pour un projet quelconque. Si le mécanisme est utilisé pour évaluer de nombreux projets publics potentiels, nous serons satisfaits si la somme espérée est négligeable.

Soit $F(\cdot)$ la distribution de la disponibilité à payer d'un agent et $F_{N-1}(\cdot)$ la distribution de la somme x des $N-1$ autres agents. D'après la définition du mécanisme à pivot, l'agent est un pivot si

$$|x| < |v|$$

et

$$v < 0 < x$$

ou

$$x < 0 < v$$

L'agent qui est un pivot doit payer $|x|$.

La somme espérée des paiements est donc :

$$E_N = N \int_{-\infty}^{+\infty} dF(v) \int_{\{x \,|\, |x| < |v| \text{ et } xv < 0\}} |x| \, dF_{N-1}(x)$$

Tout d'abord, nous démontrons de façon générale que la somme espérée des impôts croît seulement comme la racine carrée de la taille de la population quand la moyenne de la distribution est nulle et converge vers zéro lorsque le nombre d'agents croît quand la moyenne de la distribution est non nulle.

Théorème 6 : Si la fonction de répartition $F(\cdot)$ est absolument continue, si la variance de $F(\cdot)$ est bornée et normalisée à un :

– et si, de plus, la densité $f(\cdot)$ est à mode unique égal à zéro :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E_N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \quad \text{quand} \quad \mu = 0$$

– et si, de plus, $N^{\alpha} f_N(x)$ converge uniformément vers zéro quand N tend vers l'infini pour des valeurs α

$$\lim_{N \to \infty} N^{\alpha} E_N = 0 \quad \text{quand} \quad \mu \neq 0$$

Démonstration : Considérons tout d'abord le cas $\mu = 0$.

Nous voulons évaluer la limite quand N tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} E_N = \sqrt{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dF(v) \int_{\{x / |x| < |v| \text{ et } xv < 0\}} |x| \, dF_{N-1}(x)$$

Soit $y = \dfrac{x}{\sqrt{N-1}}$ et $G_{N-1}(\cdot)$ la fonction de répartition de y.

D'après le théorème de Lindeberg-Levy, $G_{N-1}(\cdot)$ converge en tout point vers la fonction de répartition normale qui est absolument continue. Par conséquent, la densité $g_{N-1}(y)$ converge presque partout vers la densité de la loi normale. Remarquons que le maximum de $g_{N-1}(y)$ est toujours 0. Puisqu'au point 0, $g_{N-1}(y)$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, la suite des fonctions $g_{N-1}(\cdot)$ est uniformément bornée par une constante A.

$$\frac{E_N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}\int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \int_{0}^{-v} x\, f_{N-1}(x)\,dx$$

$$- \sqrt{N}\int_{0}^{+\infty} f(v)\,dv \int_{-v}^{0} x\, f_{N-1}(x)\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{N}{N-1}}\int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \int_{0}^{-v} x\, g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx$$

$$+ \sqrt{\frac{N}{N-1}}\int_{0}^{+\infty} f(v)\,dv \int_{-v}^{0} (-x)\, g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx$$

Puisque :

$$\left| f(v)\, x\, g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) \right| < A\,|f(v)x|$$

et :

$$\int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \int_{0}^{-v} x\,dx + \int_{0}^{\infty} f(v)\,dv \int_{-v}^{0} (-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{2} f(v)\,dv = \frac{1}{2}$$

d'après le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E_N}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \int_{0}^{-v} x \lim_{N} g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx \; +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} f(v)\,dv \int_{-v}^{0} (-x) \lim_{N} g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

Considérons maintenant le cas $\mu \neq 0$:

$$N^{\alpha} E_N = N^{\alpha}\int_{-\infty}^{0} f(v)\,dv \int_{0}^{-v} x\, f_{N-1}(x\,,\mu)\,dx - N^{\alpha}\int_{0}^{\infty} f(v)\,dv$$

$$\int_{-v}^{0} x\, f_{N-1}(x\,,\mu)\,dx\;.$$

D'après l'hypothèse une application du théorème de Lebesgue nous donne le résultat.

Q.E.D.

Note : Les hypothèses du théorème sont satisfaites par la loi normale, pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Toutefois, le résultat est alors vrai pour tout α.

4. Mécanisme presque satisfaisant avec un budget de l'Etat équilibré

Le résultat précédent est intéressant et peut justifier l'approche d'équilibre partiel utilisée si l'on est prêt à considérer que la taxe par tête est si petite en général que les agents n'en tiennent pas compte. On peut ne pas être complètement satisfait par un tel résultat dans la mesure notamment où la force de l'incitation décroît avec la taille de l'économie.

Aussi, la question suivante surgit-elle : supposons que l'on redistribue les taxes perçues par le mécanisme et que les agents aient conscience de cette redistribution. Est-ce que les agents ont encore intérêt à dire la vérité ?

Pour répondre à cette question, il faut préciser la redistribution envisagée, ici une redistribution égale, ainsi que les anticipations des agents concernant les disponibilités à payer des autres agents. Ici nous supposons que chaque agent croît que les évaluations des autres sont issues indépendamment d'une population dont la fonction de répartition est $F(\cdot)$. Le résultat de cette section est que, dans ce cadre, la réponse optimale de l'agent approche la vérité lorsque l'économie croît. De plus, la probabilité qu'une bonne décision soit prise tend vers 1 quand le nombre d'agents tend vers l'infini.

Théorème 7 : Si la fonction de répartition $F(\cdot)$ est absolument continue à variance bornée et si la densité $f(\cdot)$ est à mode unique (zéro) et symétrique autour de zéro, et si $\lim\limits_{N \to \infty} \sqrt{N} f_N(x)$ est uniformément borné et converge uniformément vers une constante sur tout compact, la réponse de l'agent converge vers la vérité lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini.

Démonstration : Exprimons tout d'abord l'espérance mathématique de l'utilité d'un agent qui donne une réponse w ($\geqslant 0$ sans perte de généralité). Il y a N agents et x dénote la somme des $N - 1$ autres.

L'utilité espérée du projet lui-même est :

$$\int_{-w}^{\infty} v \, dF_{N-1}(x) \tag{4.1}$$

La taxe qui lui est imposée est :

$$\int_{-w}^{0} x\, dF_{N-1}(x) \text{ car pour } w > 0 \text{ l'agent est un pivot si et seulement si } -w < x < 0 \tag{4.2}$$

Cependant, d'après le processus de redistribution des taxes choisi $\frac{1}{N}$ ième de sa propre taxe lui est réversé de sorte que sa taxe nette est :

$$\frac{N-1}{N} \int_{-w}^{0} x\, dF_{N-1}(x) \tag{4.3}$$

Enfin, il lui est réversé $\frac{1}{N}$ ième des taxes de tous les autres agents.

Considérons un agent pivot typique différent que l'agent étudié ; x désigne maintenant la somme des réponses des $N-2$ autres agents. La taxe espérée pour cet agent est alors :

$$\int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x)\, dF(Z) - \\ - \int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x)\, dF(Z) \tag{4.4}$$

le premier terme correspondant au cas où l'agent pivot fait réaliser le projet et le deuxième terme au cas où l'agent fait échouer le projet.

L'espérance de gain de l'agent étudié est alors :

$$\frac{(N-1)}{N} \left[\int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x)\, dF(Z) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x)\, dF(Z) \right] \tag{4.5}$$

L'espérance de gain total est, pour une réponse $w \geqslant 0$:

$$\int_{-w}^{\infty} v\, dF_{N-1}(x) + \frac{(N-1)}{N} \int_{-w}^{0} x\, dF_{N-1}(x) + \frac{(N-1)}{N} \cdot \tag{4.6}$$

$$\left[\int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x)\, dF(Z) - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x)\, dF(Z) \right]$$

Nous savons que la fonction (4.1) + (4.2), qui correspond au mécanisme originel, est maximée pour $w = v$ par la propriété de stratégie dominante unique.

Le terme supplémentaire $-\frac{1}{N}\int_{-w}^{0} x \; dF_{N-1}(x)$, qui correspond à la diminution de sa propre taxe, est symétrique autour de zéro où il réalise son minimum et est monotone de part et d'autre de zéro. Par conséquent, le maximum de (1) + (3) est atteint en un point v^* qui a le même signe que v et est plus grand en valeur absolue. De fait :

$$v^* = \frac{N}{N-1} v \text{ c'est-à-dire } v^* \text{ est borné } \forall N.$$

Considérons maintenant (4.5). Posons les changements de variables suivants :

$$u = x + w \text{ dans la première intégrale et}$$
$$v = -x - w \text{ dans la deuxième intégrale.}$$

Nous obtenons :

$$\frac{(N-1)}{N}\int_0^\infty f_{N-2}(u-w)\, uF(-u)\, du + \\ + \int_0^\infty f_{N-2}(-v-w)\, v\,(1 - F(v))\, dv$$

Puisque $f(\cdot)$ et $f_{N-2}(\cdot)$ sont symétriques autour de zéro :

$$F(-u) = 1 - F(u)$$
$$f_{N-2}(-v-w) = f_{N-2}(v+w)$$

D'où :

$$\frac{N-1}{N}\left[\int_0^\infty f_{N-2}(u-w)\, u(1-F(u))\, du + \right. \\ \left. + \int_0^\infty f_{N-2}(v+w)\, v(1-F(v))\, dv\right]$$

Il est clair dès lors que cette fonction de w est symétrique autour de zéro.

Si le mode est unique et en zéro, cette fonction est décroissante sur sa branche positive et croissante sur sa branche négative ; elle prend son maximum en zéro, de sorte que le maximum de (4.1) + (4.3) + (4.4) appartient à l'intérieur de l'intervalle $[0, v^*]$ et est donc caractérisé par un zéro de la dérivée de (4.1) + (4.3) + (4.4).

Considérons maintenant cette dérivée égale, après quelques manipulations, à :

$$v\, f_{N-1}(-w) - \frac{N-1}{N}\, w \cdot f_{N-1}(-w) +$$

$$+ \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} dF(Z) - \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) -$$

$$- \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x)\, f(-w-x)\, dF_{N-2}(x) = 0 \qquad (4.7)$$

Considérons tout d'abord le dernier terme de (4.7) :

$$- \frac{(N-1)}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x)\, f(-w-x)\, dF_{N-2}(x) =$$

$$= \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x)\, f_{N-2}(x)\, dF(-w-x)$$

Nous voulons calculer :

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N} \cdot \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x)\, f_{N-2}(x)\, dF(-w-x) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N} g_N(w) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) \sqrt{N} f_{N-2}(x)\, dF(-w-x) \qquad (4.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) \sqrt{N} f_{N-2}(x)\, dF(-w-x) = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$$

Considérons tout d'abord $\int_0^\infty$ et effectuons le changement de variable $w + x = u$; on obtient (par symétrie de $f(\cdot)$) :

$$\int_0^\infty u \sqrt{N} f_{N-2}(u-w)\, f(u)\, du$$

Or $|u \sqrt{N} f_{N-2}(u-w)\, f(u)| \leqslant 2Kuf(u)$ puisque $\sqrt{N} f_{N-2}(u-w)$ est uniformément borné par K ; $u\, f(u)$ est intégrable sur $[0,\infty[$ car $f(\cdot)$ a une variance finie. Par le théorème de Lebesgue :

$$\int_0^\infty u \sqrt{N} f_{N-2}(u-w)\, f(u)\, du = \widetilde{K} \int_0^\infty uf(u)\, du$$

En traitant de façon analogue le cas $u < 0$, on obtient finalement :

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N} g_N(w) = 0$$

Par conséquent $\sqrt{N} g_N(w)$ converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $[u , v^*]$ quand N tend vers l'infini.

Considérons les termes 3 et 4 de [4.7] que l'on récrit :

$$h_N(w) = \frac{N-1}{N} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} dF(Z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \right]$$

$$h'_N(w) = \frac{N-1}{N} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(-w-x)\, f_{N-2}(x)\, dx - f_{N-2}(-w) \right]$$

$$= \frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]\, dF(-w-x)$$

Puisque $\sqrt{N}\,[f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]$ est uniformément borné, on peut de nouveau appliquer le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N} h'_N(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim \sqrt{N}\,[f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]\, dF(-w-x) = 0$$

Puisque $\sqrt{N} h'_N(w)$ converge uniformément vers 0 sur $[0 , v^*]$, et que $\sqrt{N} h_N(0) = 0$, $\sqrt{N} h_N(w)$ converge uniformément vers zéro sur $[0 , v^*]$.

(4.7) peut être récrit comme :

$$\left[v - \frac{N-1}{N} w \right] f_{N-1}(-w) + h_N(w) + g_N(w) = 0 \qquad (4.9)$$

Multipliant par $\sqrt{N}$:

$$\left[v - \frac{N-1}{N} w \right] \sqrt{N} f_{N-1}(-w) + \sqrt{N} h_N(w) + \sqrt{N} g_N(w) = 0$$

Nous obtenons d'après les résultats ci-dessus que w tend vers la vérité v.

Q-E-D

Notons que les hypothèses du théorème sont en particulier vérifiées par la loi normale de moyenne zéro et de variance quelconque.

D'après la démonstration du théorème précédent, nous savons que la réponse optimale $w_N(v_i)$ de l'agent i lorsque l'échantillon est de taille N est telle que :

a) $w_N(\cdot)$ est une fonction integrable de v_i.

b) $w_N(v_i)$ tend vers v_i quand N tend vers l'infini, pour tout v_i.

c) $| w_N(v_i) - v_i | < | v_i |$

d) $w_N(v_i) = - w_N(- v_i)$

Pour démontrer que le mécanisme prend asymptotiquement une bonne décision il suffit de montrer que :

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{N} v_i \gtrless 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} w_N(v_i) \lessgtr 0\right] \tag{4.10}$$

tend vers zéro quand $N \to \infty$. Ainsi la probabilité de prendre une mauvaise décision tend vers zéro quand $N \to \infty$.

***Théorème** 8* : Sous les hypothèses du théorème 7, la probabilité que le mécanisme prenne une bonne décision tend vers 1 quand le nombre d'agents tend vers l'infini.

Démonstration : Notons tout d'abord que (4.10) est équivalent à :

$$\Pr\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i}{\sqrt{N}} \gtrless 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{i=1}^{N} w_N(v_i)}{\sqrt{N}} \lessgtr 0\right] \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty \tag{4.11}$$

Notons :

$$u_{iN} = \frac{v_i}{\sqrt{N}}$$

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} u_{iN}$$

$$\epsilon_{iN} = \frac{w_N(v_i)}{\sqrt{N}}$$

$$\epsilon_N = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_{iN}$$

$$X_N = [u_N, \epsilon_N]$$

Soit $X = [X^1, X^2]$ le vecteur aléatoire normal de moyenne 0 et de matrice des variances et covariances $\begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$.

D'après le théorème de Varadarajan (voir Rao [8]) nous aurons montré que X_N tend en loi vers X si nous montrons que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in R \times R$, $\lambda_1 u_N + \lambda_2 \epsilon_N$ tend vers $\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2$, c'est-à-dire vers la loi normale de moyenne 0 et de variance $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sigma^2$.

Soit $a_{iN} = \lambda_1 u_{iN} + \lambda_2 \epsilon_{iN}$ et soit F_{iN} la distribution de probabilité de a_{iN}. Soit enfin :

$$a_N = \lambda_1 u_N + \lambda_2 \epsilon_N \ .$$

Pour démontrer ce point, nous utilisons le théorème de Lindeberg-Feller (voir Malinvaud [6]).

Soit $\sigma_\infty^2 = \lim_{N \to \infty} \text{Var}\, a_N$: le théorème spécifie que si $\sigma_\infty^2 > 0$ et si

$$\forall u_0 > 0 \ \sum_{i=1}^{N} \int_{|u| \geqslant u_0} u^2 \, dF_{iN} \to 0$$

quand $N \to \infty$, alors a_N tend vers la loi normale de moyenne zéro et de variance σ_∞^2 .

Il nous reste donc à montrer que $\sigma_\infty^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sigma^2$ et que la condition de Lindeberg-Feller est satisfaite.

Soit : $$e_N(v_i) = w_N(v_i) - v_i \ .$$

Notons d'abord que $E e_N(v_i) = 0$, puisque la distribution de v_i est symétrique et que $w_N(v_i) = - w_N(-v_i)$:

$$a_{iN} = \frac{1}{\sqrt{N}} [(\lambda_1 + \lambda_2) v_i + \lambda_2 e_N(v_i)]$$

$$\sigma_{iN}^2 = \frac{1}{N} [(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sigma^2 + 2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) E v_i e_N(v_i) + \lambda_2^2 E e_N(v_i)^2] \ .$$

Soit :

$$\sigma_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{iN}^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sigma^2 + 2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E v_i e_N(v_i) + $$
$$+ \lambda_2^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E e_N(v_i)^2$$

Mais :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E v_i e_N(v_i) = E v_i e_N(v_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_i e_N(v_i) f(v_i) \, dv_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_N(v_i) \, dv_i$$

avec : $|\psi_N(v_i)| < v_i^2 f(v_i)$ intégrable, par c)

$\psi_N(v_i) \to 0$ si $N \to \infty$ $\forall v_i$ par b)

Donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$E v_i e_N(v_i) \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

De la même façon :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}e_N(v_i)^2 = \mathrm{E}e_N(v_i)^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

Par conséquent : $\sigma_N^2 \to (\lambda_1 + \lambda_2)^2\,\sigma^2$

Considérons maintenant la condition de Lindeberg-Feller :

$$\int_{|u|\geqslant u_0} u^2\, d\mathrm{F}_{iN} = \int_{\mathrm{A}_N} \frac{[\lambda_1 v_i + \lambda_2 w_N(v_i)]^2}{N}\, d\mathrm{F}(v_i)$$

où :

$$\mathrm{A}_N = \{v_i / |(\lambda_1 + \lambda_2)\, v_i + \lambda_2\, e_N(v_i)| > \sqrt{N}u_0\}$$

Cette intégrale est en fait indépendante de i :

$$|\lambda_1 v_i + \lambda_2 w_N(v_i)|^2 \leqq \lambda_1^2 v_i^2 + \lambda_2^2 w_N(v_i)^2 + 2\lambda_1\lambda_2\ |v_i w_N(v_i)|$$
$$\leqq (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2 v_i^2 \quad \text{par c)}$$

$$\int_{\mathrm{A}_N} u^2 d\mathrm{F}_{iN} \leqq \frac{(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2}{N}\int_{\mathrm{A}_N} v_i^2 d\mathrm{F}(v_i)$$

Puisque $\int v_i^2 d\mathrm{F}(v_i)$ est fini, il suffit de montrer que $\mathrm{R}\setminus \mathrm{A}_N \to \mathrm{R}$, quand $N \to \infty$ pour montrer que $\int_{\mathrm{A}_N} v_i^2\, d\mathrm{F}(v_i)$ est arbitrairement petit (de plus ce sera indépendamment de i) :

$$\mathrm{R}\setminus \mathrm{A}_N = \{v / |\lambda_1 v + \lambda_2 w_N(v)| \leqslant u_0\sqrt{N}\}$$

Mais : $|\lambda_1 v + \lambda_2 w_N(v)| \leqslant (\lambda_1 + 2\lambda_2)\, |v|$

$$\forall v\,, \quad \exists N_0\,, \quad \text{tel que pour} \quad N > N_0\,, \quad |v| \leqslant \frac{u_0\sqrt{N}}{\lambda_1 + 2\lambda_2}$$

Donc $\mathrm{R}\setminus \mathrm{A}_N \to \mathrm{R}$ et :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N^* \ :\ N > N^* \text{ implique } \left|\int_{\mathrm{A}_N} v_i\, d\mathrm{F}(v_i)\right| < \frac{\epsilon}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2}$$

D'où $\forall u_0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N^*$, $\forall N > N^*$ implique

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\int_{|u|\geqslant u_0} u^2\, d\mathrm{F}_{iN}\right| < \epsilon$$

Nous avons donc montré que X_N converge en loi vers X ; par conséquent

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N_0$ tel que $N > N_0$ implique

$$|\Pr[u_N \gtrless 0 \text{ et } \epsilon_N \lessgtr 0] - \Pr[X^1 \gtrless 0 \text{ et } X^2 \lessgtr 0]| < \epsilon$$

Puisque $\Pr[X^1 \gtrless 0 \text{ et } X^2 \lessgtr 0] = 0$, nous avons le résultat.

Q.E.D.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] CLARKE E.H. – Multipart Pricing of Public Goods, *Public Choice*, 1971, 19-33.

[2] GREEN J. et LAFFONT J.J. – On the Revelation of Preferences for Public Goods, Technical Report n° 140, Stanford University, 1974, à paraître dans *Journal of Public Economics*.

[3] GREEN J. et LAFFONT J.J. – Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods, *Econometrica*, 1977, 427-438.

[4] GROVES T. – Incentives in Teams, *Econometrica*, 1973, 617-631.

[5] GROVES T. et LEDYARD J. – An Incentive Mechanism for Efficient Resource Allocation in General Equilibrium with Public Goods, *D.P. n° 119*, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.

[6] MALINVAUD E. – *Méthodes statistiques de l'économétrie*, Paris, Dunod, 1969.

[7] MALINVAUD E. – *Leçons de théorie microéconomique*, Paris, Dunod, 1970.

[8] RAO C.R. – *Linear Statistical Inference*, London, John Wiley, 1965.

[9] VICKREY W. – Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders, *Journal of Finance*, 1961, 8-37.

[10] WICKSELL K. – *Finanztheoretische Untersuchungen und das Steuerwesen Schweden's*, 1896, Jena, Germany.